

# 两类 Witten-Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题的第一特征值\*

邓义华, 肖娟, 李元旦

(衡阳师范学院数学与计算科学系, 湖南 衡阳 421008)

**摘要:** 首先在  $\mathbf{R}^n$  的有界开区域  $\Omega$  上讨论了一类 Witten-Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题的第一特征值, 得到了这类特征值下界的一个较好的估计。然后, 在区间  $(-d, d)$  上讨论了另一类 Witten-Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题的第一特征值, 得到了这类特征值的准确值。

**关键词:** Witten-Laplacian 算子; Dirichlet 边值问题; 第一特征值; Riemann 流形

**中图分类号:** O186.16    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579 (2014) 02-0156-03

## The First Eigenvalue of the Dirichlet Boundary Value Problem for Two Classes of Witten-Laplacian Operators

DENG Yihua, XIAO Juan, LI Yuandan

(Department of Mathematics and Computing Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

**Abstract:** The first eigenvalue of Dirichlet boundary value problem is discussed for a class of Witten-Laplacian operators in a bounded open domain  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Some better lower bound estimates of these eigenvalues are obtained. And the first eigenvalue of the Dirichlet boundary problem is discussed for another class of Witten-Laplacian operators in the interval  $(-d, d)$ . The accurate value of these eigenvalues is obtained.

**Key words:** Witten-Laplacian operator; Dirichlet boundary value problem; the first eigenvalue; Riemannian manifold

假设  $(M, g)$  是 Riemann 流形,  $f$  是  $(M, g)$  上的光滑函数, 那么在  $(M, g)$  上有一类重要的 Witten-Laplacian 算子, 其定义为

$$\Delta_f = \Delta - \nabla f \nabla$$

Witten-Laplacian 算子有时也被称为带权 Laplacian 算子或  $f$ -Laplacian 算子。目前, 这类算子已经得到了许多方面的研究。比如, Chen 和 Brighton 等<sup>[1-2]</sup> 讨论了  $f$  调和函数的性质, 得到了这类调和函数的一些梯度估计。Dung 等<sup>[3-4]</sup> 利用  $f$ -Laplacian 算子的第一特征值  $\lambda_1$  刻画了  $f$  调和函数的性质以及流形  $(M, g)$  的度量性质。Chen 等<sup>[5-6]</sup> 得到了 Witten-Laplacian 算子特征值的一个比较定理。利用该比较定理, Futaki 等<sup>[7]</sup> 讨论了当  $Ric + Hess\varphi \geq$

$Kg$  时  $\varphi$ -Laplacian 算子第一特征值  $\lambda_1$  的下界估计问题, 在此基础上得到了一类紧致 Riemann 流形直径下界的一个比较好的下界估计。

假设  $a, b, d, k$  都是常数并且  $d > 0, k > 0$ ,  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^n$  上的有界开区域, 那么可以在  $\Omega$  和区间  $(-d, d)$  上分别定义以下函数

$$w(x) = -\frac{k}{2} |x|^2, x \in \Omega,$$

$$v(x) = ax + b, x \in (-d, d)$$

显然  $w$  和  $v$  都是光滑函数。由于开区域  $\Omega$  和开区间  $(-d, d)$  都可以看成是 Riemann 流形, 所以我们可以分别在  $\Omega$  和  $(-d, d)$  上考虑  $w$ -Laplacian 算子

\* 收稿日期: 2013-09-01

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (14JJ2120); 湖南省重点建设学科资助项目 ([2011] 76)

作者简介: 邓义华 (1971 年生), 男; 研究方向: 微分几何与微分方程; E-mail: dengchen4032@126.com

$\Delta_w = \Delta - kx \nabla$  和  $v$ -Laplacian 算子  $\Delta_v = \Delta - a \nabla$ 。受前面所提这些参考文献的启发，本文将进一步讨论以上两类 Witten-Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题的第一特征值。通过直接计算不难得到  $Ric + Hessw = -kg$  以及  $Ric + Hessv = 0$ ，所以本文相当于针对两种特殊情况  $K = -k < 0$  和  $K = 0$  讨论文 [7] 中的一些问题。这时，我们认为本文的结论应该比文 [7] 中的定理 1.1 更好。

### 1 $w$ -Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题第一特征值的下界估计

假设  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^n$  上的有界开区域，在  $\Omega$  上定义如下光滑函数

$$w(x) = -\frac{k}{2} |x|^2, x \in \Omega$$

在本节，我们将讨论  $w$ -Laplacian 算子  $\Delta_w = \Delta - kx \nabla$  的如下 Dirichlet 边值问题的第一特征值的估计问题

$$\begin{cases} \Delta u - kx \nabla u = \lambda u, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

如果  $k = 0$ ，那么问题 (1) 就是通常的 Laplacian 算子  $\Delta$  的特征值问题。对 Laplacian 算子的第一特征值进行估计已经有了很长的历史，目前在这方面已经取得了很多好的研究成果<sup>[8-10]</sup>。特别是，在文 [8] 中已经得到了当流形的 Ricci 曲率  $Ric \geq 0$  时 Laplacian 算子第一特征值  $\lambda_1(\Delta)$  的如下最佳下界估计

$$\lambda_1(\Delta) \geq \frac{\pi^2}{d^2} \quad (2)$$

其中  $d$  为  $\Omega$  的直径。当  $k \neq 0$  时，研究问题 (1) 的特征值一般是用所谓的加权体积测度  $e^{-w} dx$ ，如引言中的大部分参考文献都是这样。但是，运用通常的体积测度  $dx$  研究 (1) 的特征值目前似乎还很少有这方面的工作。根据文 [3-4]，我们知道  $f$ -Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题的第一特征值可以用下面的式子来刻画

$$\lambda_1(\Delta_f) = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 e^{-f} dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 e^{-f} dx}$$

因此，考虑问题 (1) 的第一特征值  $\lambda_1$  时，我们不妨假设  $u$  是  $\Omega$  上的正函数。为了得到问题 (1) 的第一特征值下界的更好估计，我们将借用文 [7] 中的一些方法。为此，我们任取常数  $\alpha > 1$ ，然后将问题 (1) 中的方程两边同时乘以  $u^{\alpha-1}$  并进行积分得

$$-\int_{\Omega} u^{\alpha-1} \Delta u dx - k \int_{\Omega} u^{\alpha-1} x \cdot \nabla u dx = \lambda \int_{\Omega} u^{\alpha} dx \quad (3)$$

根据散度定理以及问题 (1) 中的边界条件得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{\alpha-1} x \cdot \nabla u dx &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(u^{\alpha-1} x) dx = \\ &= -(\alpha - 1) \int_{\Omega} u^{\alpha-1} x \cdot \nabla u dx - n \int_{\Omega} u^{\alpha} dx \end{aligned}$$

从而有

$$\int_{\Omega} u^{\alpha-1} x \cdot \nabla u dx = -\frac{n}{\alpha} \int_{\Omega} u^{\alpha} dx \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3)，然后运用分部积分法，可以得到

$$(\alpha - 1) \int_{\Omega} u^{\alpha-2} |\nabla u|^2 dx = (\lambda - \frac{kn}{\alpha}) \int_{\Omega} u^{\alpha} dx \quad (5)$$

假设  $u^{\alpha} = h^2$ ，那么  $4|\nabla h|^2 = \alpha^2 u^{\alpha-2} |\nabla u|^2$ ，所以根据式 (5) 不难得到

$$\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha^2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx = (\lambda - \frac{kn}{\alpha}) \int_{\Omega} h^{\alpha} dx$$

于是

$$\frac{\alpha^2 \lambda - \alpha kn}{4(\alpha - 1)} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \geq \lambda_1(\Delta) \quad (6)$$

根据式 (2) 以及式 (5) 可得

$$\lambda \geq \frac{4}{\alpha} (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{1}{\alpha} kn \quad (7)$$

其中  $d$  为  $\Omega$  的直径， $\alpha$  是任意大于 1 的常数。令  $s = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ，那么由 (7) 可得下面的结论。

**定理 1** 特征值问题 (1) 的第一特征值  $\lambda_1$  满足下面的不等式

$$\lambda_1 \geq \sup_{s \in (0,1)} \{4s(1-s) \frac{\pi^2}{d^2} + (1-s)kn\}$$

### 2 $v$ -Laplacian 算子 Dirichlet 边值问题第一特征值的准确值

假设  $a, b, d$  都是常数并且  $d > 0$ ， $v(x) = ax + b, x \in (-d, d)$ 。在本节，我们主要讨论  $v$ -Laplacian 算子  $\Delta_v = \Delta - a \nabla$  的 Dirichlet 边值问题第一特征值的准确值。为此，我们假设该边值问题的第一特征值为  $\lambda_1$ ，相应的特征函数为  $u$ 。那么，我们有

$$\begin{cases} -u'' + au' = \lambda_1 u, x \in (-d, d) \\ u(-d) = u(d) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

**定理 2** 特征值问题 (8) 的第一特征值为  $\lambda_1$

$= \frac{\pi^2}{4d^2} + \frac{1}{4}a^2$ , 并且与  $\lambda_1$  对应的特征函数为  $u = Ce^{\frac{a}{2}x} \cos \frac{\pi}{2d}x$ , 其中  $C$  为任意常数。

**证明** 由二阶常系数线性齐次常微分方程的理论可知, 当  $a^2 > 4\lambda_1$  时问题 (8) 中的方程的通解为

$$u = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (9)$$

其中

$$k_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\lambda_1}}{2},$$

$$k_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\lambda_1}}{2}$$

将问题 (8) 中的边界条件代入式 (9), 我们不难发现  $C_1 = C_2 = 0$ 。所以在这种情况下问题 (8) 没有非零解。同理可得, 当  $a^2 = 4\lambda_1$  时问题 (8) 也没有非零解。所以只有当  $a^2 < 4\lambda_1$  时问题 (8) 才有非零解, 这时问题 (8) 中的方程的通解为

$$u = C_1 e^{\frac{a}{2}x} \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}x + C_2 e^{\frac{a}{2}x} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}x \quad (10)$$

将问题 (8) 中的边界条件代入式 (10) 得

$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}d + C_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}d = 0 \\ C_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}d - C_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda_1 - a^2}d = 0 \end{cases} \quad (11)$$

如果对任意的整数  $m$  都有  $\sqrt{4\lambda_1 - a^2}d \neq 2m\pi$  并且  $\sqrt{4\lambda_1 - a^2}d \neq 2m\pi + \pi$ , 那么由式 (11) 容易得到  $C_1 = C_2 = 0$ , 所以在这样的情况下问题 (8) 还是没有非零解。因此, 当问题 (8) 有非零解时必有整数  $m$  使得  $\sqrt{4\lambda_1 - a^2}d = 2m\pi$  或  $\sqrt{4\lambda_1 - a^2}d = 2m\pi + \pi$ 。容易验证, 为了使问题 (8) 有非零解并且  $\lambda_1$  取值最小, 只能是  $\sqrt{4\lambda_1 - a^2}d = \pi$ 。这样, 我们得到了  $\lambda_1$  的准确值为

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4d^2} + \frac{1}{4}a^2 \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11) 和式 (10) 可知, 与  $\lambda_1$

对应的特征函数为  $u = Ce^{\frac{a}{2}x} \cos \frac{\pi}{2d}x$ , 其中  $C$  为任意常数。定理 2 证明完毕。

**注** 定理 2 说明

$$\inf_{\varphi \in C_0^\infty(-d, d)} \frac{\int_{-d}^d |\varphi'|^2 e^{-ax} dx}{\int_{-d}^d \varphi^2 e^{-ax} dx} = \frac{\pi^2}{4d^2} + \frac{1}{4}a^2$$

这个下确界不随  $a$  的符号的改变而改变, 且可以在

$\varphi(x) = e^{\frac{a}{2}x} \cos \frac{\pi}{2d}x$  处达到。

**参考文献:**

- [1] CHEN L, CHEN W Y. Gradient estimates for positive smooth  $f$ -harmonic functions [J]. Acta Math Sci, 2010, 30B: 1614 - 1618.
- [2] BRIGHTON K. A Liouville-type theorem for smooth metric measure spaces [J]. J Geom Anal, 2013, 23: 562 - 570.
- [3] DUNG N T, SUNG C J A. Smooth metric measure spaces with weighted Poincaré inequality [J]. Math Z, 2013, 273: 613 - 632.
- [4] DUNG N T. A splitting theorem on smooth metric measure spaces [J]. Arch Math, 2012, 99: 179 - 187.
- [5] CHEN M F, WANG F Y. Application of coupling method to the first eigenvalue on manifolds [J]. Sci Sinica Ser A, 1984, 37: 1 - 14.
- [6] CHEN M F, WANG F Y. General formula for lower bound of the first eigenvalue on Riemannian manifolds [J]. Sci Sinica Ser A, 1997, 40: 384 - 394.
- [7] FUTAKI A, LI H Z, LI X D. On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons [J]. Ann Glob Anal Geom, 2013, 44: 105 - 114.
- [8] ZHONG J Q, YANG H C. On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold [J]. Sci Sinica Ser A, 1984, 27(12): 1265 - 1273.
- [9] LI P, YAU S T. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold [J]. Proc Symp Pure Math, 1980, 36: 205 - 239.
- [10] WANG Q L, XIA C Y. Isoperimetric bounds for the first eigenvalue of the Laplacian [J]. Z Angew Math Phys, 2010, 61: 171 - 175.